

**Муниципальный этап
всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2024-2025 учебном году
в Кемеровской области – Кузбассе**

Теоретический тур

8 класс

Максимальное количество баллов - 35.

Время выполнения - 235 минут.

Краткая инструкция.

Все олимпиадные задания выполняются письменно. Желательно пользоваться ручками с чернилами синего цвета. Чертежи производить желательно ручкой (сначала возможно использовать карандаш, но потом чертеж обвести ручкой). Разрешается использовать чертёжные принадлежности (линейка, циркуль, ластик) для выполнения заданий.

Участник олимпиады на выданном бланке ответов записывает подробные решения задач, указывая соответствующий номер задачи. Переписывать формулировки заданий не обязательно. Предварительные вычисления можно делать на выданных дополнительных листах (черновиках).

При выполнении заданий не допускается использование справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

После завершения работы все бумаги должны быть сданы организаторам олимпиады, включая черновики.

Решения задач, критерии оценивания

1. Для некоторого целого n известно, что $2n + 1 \div 3$. Какой остаток дает выражение $14n + 41$ при делении на 3?

Решение. Имеем: $14n + 41 = 7(2n + 1) + 33 + 1$. В последнем выражении из трех слагаемых первое и второе делятся на 3, поэтому оно дает остаток 1.

Ответ: 1.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов.

2. На доске выписаны 2024 произвольных целых числа. Оказалось, что сумма любых шести из них отрицательна. Может ли сумма всех быть положительной?

Решение. Упорядочим числа по убыванию. Сумма первых 6 чисел отрицательна, значит последнее среди них (минимальное) должно быть отрицательно. Все числа, следующие за ним в ряду также должны быть отрицательны. Сумма всех чисел состоит из отрицательной суммы первых шести и суммы всех остальных, каждое из которых отрицательно. Значит сумма не может быть положительной.

Ответ: нет.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов.

3. Даны три положительных числа x, y, z (необязательно целых). Докажите, что

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} > 1$$

Решение 1.

Имеем: $\frac{x}{y+z} > \frac{x}{x+y+z}$, $\frac{y}{x+z} > \frac{y}{x+y+z}$, $\frac{z}{x+y} > \frac{z}{x+y+z}$. Сумма левых частей этих неравенств дает нам левую часть заданного неравенства. Сумма правых частей равна 1.

Решение 2.

Переобозначим числа так, что $x \leq y \leq z$. Тогда $\frac{y}{x+z} \geq \frac{y}{2z}$, $\frac{z}{x+y} \geq \frac{z}{2y}$.

Согласно неравенству Коши: $\frac{\frac{y}{2z} + \frac{z}{2y}}{2} \geq \sqrt{\frac{y}{2z} \cdot \frac{z}{2y}}$, откуда сумма $\frac{y}{2z} + \frac{z}{2y} \geq 1$. Так как дробь $\frac{x}{y+z}$ положительна, получаем требуемое.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов.

4. Однажды четверо ребят решили украсить двор – посадить в ряд несколько елей и рябин. При этом они считают ряд «красивым», если никакие две ели не являются соседними (рябины рядом расти могут). У них оказалось 12 саженцев елей и 5 саженцев рябин. Ребята разделили их так, что каждому досталось некоторое ненулевое количество саженцев. Докажите, что хотя бы один из ребят сможет высадить «красивый» ряд, используя все свои саженцы.

Решение. Имеем 4 группы, в каждой некоторое количество саженцев ели и рябины. Введем для каждой группы понятие «красота», равное разности между количеством саженцев ели и рябины в этой группе. Общая «красота» набора саженцев равна сумме характеристик «красоты» всех групп и равна $12 - 5 = 7$. Если бы «красота» каждой группы была больше 1, то суммарная красота была бы не меньше 8. Значит хотя бы в одной группе количество саженцев ели превосходит число саженцев рябины не более чем на 1. Значит их можно рассадить в нужном порядке.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Возможно решение по принципу Дирихле.

5. На клетчатой плоскости нарисован прямоугольник (границы совпадают с линиями сетки) размерами 2023 на 2025. В одной из его клеток сидит жук, а в центральной клетке прямоугольника находится ловушка. Жук может перемещаться из данной только в клетку, соседнюю с ней по стороне. Сможет ли он пройти таким образом все клетки прямоугольника, не попав в ловушку?

Решение. Введем шахматную раскраску, так что угловые клетки прямоугольника белого цвета. Тогда в самой первой строке белых клеток на 1 больше, чем черных, а в следующей наоборот. Всего строк нечетное количество, поэтому в последней строке, как и во всем наборе, белых клеток на одну больше, чем черных. Центральная клетка первой строки – черная. Она находится в том же столбце, что и центральная клетка прямоугольника, и между ними нечетное число клеток. Значит в центре также черная клетка. Если жук не проходит через клетку с ловушкой, то белых клеток, в которых ему надо побывать, на 2 больше, чем черных. Это невозможно, так как при перемещении цвета клеток чередуются.

Ответ: нет.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов.